

MJC 4, SEMESTER 3

24.02.2025

Measures of Central Tendency

Mean, Median, Mode

By-Dilip Baitha

मान लो तीन दोस्त—अंकित, भारती और चिराग—हर हफ़ते एक साथ बाहर खाने जाते हैं। लेकिन उनकी खाने की कीमतें अलग-अलग होती हैं।

उनके पिछले 5 हफ़्तों की खाने की बिल (रुपयों में) इस प्रकार हैं:

150, 200, 250, 200, 300

अब ये तीनों डिस्कस कर रहे हैं कि औसतन वे कितना खर्च करते हैं। लेकिन तीनों के पास अलग-अलग तरीके हैं!

1. Mean (औसत): अंकित का तरीका

अंकित कहता है, “भैया, जोड़कर सबको बराबर बाँट दो।”

2. Median (माध्यिका): भारती का तरीका

भारती कहती है, “बीच वाले को पकड़ लो, वही सही मिडिल पॉइंट देगा!”

3. Mode (बहुलक): चिराग का तरीका

चिराग कहता है, “जो सबसे ज़्यादा बार आता है, वही हमारा असली राजा है!”

Mean (माध्य)

- सूत्र: Mean = $\Sigma X / N$

Mean (औसत) – सबका जोड़, फिर बराबर बाँटो।

- गुण:

- सभी डेटा को ध्यान में रखता है।
- गणना आसान है।

- दोष:

- Extreme Values से प्रभावित होता है।

- उपयोग:

- IQ स्कोर और Reaction Time के विश्लेषण में।

Mean के सूत्र (Grouped & Ungrouped Data) with Example

1. Ungrouped Data (असंगठित डेटा)

Formula:

$$\text{Mean} = \frac{\sum X}{N}$$

$$\text{Mean} = \frac{50+60+70+80+90}{5} = 70$$

2. Grouped Data (संगठित डेटा)

Formula:

$$\text{Mean} = \frac{\sum(f \times X)}{\sum f}$$

Class Interval	Midpoint (X)	Frequency (f)	$f \times X$
0 - 10	5	2	10
10 - 20	15	3	45
20 - 30	25	5	125

$$\text{Mean} = \frac{180}{10} = 18$$

- गुण (Advantages):
-  सटीकता (Accuracy): सभी डेटा पॉइंट्स को ध्यान में रखता है।
-  गणना में सरल (Easy Calculation): इसे आसानी से निकाला जा सकता है।
-  अन्य आँकड़ों के साथ उपयोगी (Useful for Further Analysis): इसे अन्य सांख्यिकीय विश्लेषण में भी उपयोग किया जाता है।
-  भविष्यवाणी और तुलनात्मक अध्ययन के लिए उपयुक्त।

- दोष (Disadvantages):
- ✗ चरम मूल्यों से प्रभावित (Affected by Outliers): यदि कोई संख्या बहुत अधिक या बहुत कम हो, तो Mean बदल सकता है।
- ✗ असंतुलित डेटा में भ्रमित करने वाला (Misleading in Skewed Data): जब डेटा असंतुलित हो, तो Mean वास्तविक प्रवृत्ति नहीं दिखा सकता।
- ✗ Qualitative Data (गुणात्मक डेटा) पर लागू नहीं होता।
-
- (D) उपयोग (Uses in Psychology):
- ✓ IQ स्कोर का विश्लेषण (IQ का Mean = 100 रखा जाता है)।
- ✓ प्रतिक्रिया समय (Reaction Time) की गणना
- ✓ किसी Disorder के औसत लक्षणों की गंभीरता मापने में

-  Psychology में क्यों उपयोगी?
- • बताता है कि औसतन लोग कैसे सोचते या व्यवहार करते हैं।
- • Depression level, Anxiety level, Memory scores को तुलना करने में मदद करता है।
- • अगर कोई स्टूडेंट बहुत पीछे है (low IQ) या बहुत आगे है (high IQ), तो उसकी अलग से मदद की जा सकती है।

Median (माध्यिका)

- सूत्र: Median = Middle Value
- गुण:
-  Outliers से सुरक्षित रहता है।
- दोष:
-  सभी डेटा का उपयोग नहीं करता।
- उपयोग:
-  Income Studies और Clinical Studies में।

- **माध्यिका (Median)**
- **परिभाषा**: डेटा को आरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर बीच का मान।
- **उदाहरण**: 2, 4, 6, 8, 10 → माध्यिका = 6।
- **यदि सम संख्या हो**: 2, 4, 6, 8 → माध्यिका = $\{4+6\} \div \{2\} = 5$



Median Formula for Grouped Data

◆ *Median Formula:*

$$\text{Median} = L + \left(\frac{\frac{N}{2} - CF}{f} \right) ;$$

◆ *Explanation:*

- **L** = Median class की lower boundary
- **N** = कुल आवृत्ति (Total frequency)
- **CF** = Median class से पहले की cumulative frequency
- **f** = Median class की frequency
- **h** = Class width (Class interval का अंतर)

Class Interval	Frequency (f)	Cumulative Frequency (CF)
0 - 10	5	5
10 - 20	8	13
20 - 30	12	25
30 - 40	20	45
40 - 50	10	55

◆ **Step 1: Find Median Class**

$$N/2 = 55/2 = 27.5$$

Median class = **30 - 40** (as CF just before it is 25 and next is 45)

◆ **Step 2: Apply the Formula**

- **L = 30, N = 55, CF = 25, f = 20, h = 10**
- **Median = $30 + \left(\frac{27.5-25}{20} \times 10\right)$**
- **Median = $30 + \left(\frac{2.5}{20} \times 10\right)$**
- **Median = $30 + 1.25 = 31.25$**



Final Answer: Median = 31.25

- गुण (Advantages):
-  चरम मूल्यों से अप्रभावित (Not Affected by Outliers): Extreme values होने पर भी Median सही रहता है।
-  असंतुलित डेटा के लिए उपयुक्त (Better for Skewed Data): जब डेटा असंतुलित होता है, तब Median वास्तविक स्थिति को सही दर्शाता है।
-
- (C) दोष (Disadvantages):
-  सभी डेटा का उपयोग नहीं करता (Does Not Use All Data Points): सिर्फ मध्य मान देखता है, बाकी डेटा इग्नोर हो जाता है।
-  गणना कठिन हो सकती है (Difficult to Compute for Large Data Sets): जब डेटा बहुत बड़ा हो, तो Median निकालना कठिन हो सकता है।

- उपयोग (Uses in Psychology):
- ✓ Income Studies में उपयोग (आय वितरण को समझने के लिए)
- ✓ परीक्षा अंकों के विश्लेषण में (Students' Performance Analysis)
- ✓ Medical Studies में (Patients के Recovery Time के लिए)
- ✓ Survey Data के लिए, जैसे मानसिक स्वास्थ्य सर्वेक्षण।

Mode (बहुलक)

- सूत्र: Mode = सबसे अधिक बार आने वाला मान
- गुण:
 -  सबसे आम प्रवृत्ति को दर्शाता है।
- दोष:
 -  यदि कोई स्पष्ट Mode नहीं हो, तो निकालना मुश्किल।
- उपयोग:
 -  Symptoms Analysis और Consumer Behavior में।

मोड (Mode) का सूत्र

समूहित डेटा के लिए मोड ज्ञात करने का सूत्र निम्नलिखित है:

$$\text{Mode} = L + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \right) \times h$$

जहाँ:

- **L** = मोडल श्रेणी (Modal Class) की निम्न सीमा
- **f₁** = मोडल श्रेणी की आवृत्ति
- **f₀** = मोडल श्रेणी से पहले की श्रेणी की आवृत्ति
- **f₂** = मोडल श्रेणी के बाद की श्रेणी की आवृत्ति
- **h** = श्रेणी की चौड़ाई (Class Width)

उदाहरण

अंक सीमा	आवृत्ति (f)
0 - 10	5
10 - 20	8
20 - 30	15
30 - 40	25 (मोडल श्रेणी)
40 - 50	18
50 - 60	10
60 - 70	6

सूत्र:

$$\text{Mode} = L + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \right) \times h$$

गणना:



चरण 1: मोडल श्रेणी का चयन

सबसे अधिक आवृत्ति 25 है, जो 30 - 40 श्रेणी में है।

अतः मोडल श्रेणी = 30 - 40

चरण 2: दिए गए मानों को सूत्र में रखने के लिए आवश्यक डेटा

- $L = 30$
- $f_1 = 25$
- $f_0 = 15$
- $f_2 = 18$
- $h = 10$

चरण 3: सूत्र में मान रखना

चरण 3: सूत्र में मान रखना

$$\text{Mode} = 30 + \left(\frac{25-15}{2(25)-15-18} \right) \times 10$$

$$= 30 + \left(\frac{10}{50-33} \right) \times 10$$

$$= 30 + \left(\frac{10}{17} \right) \times 10$$

$$= 30 + (5.88)$$

$$= 35.88$$

अतः, मोड \approx 35.88 अंक

- गुण (Advantages):
-  सबसे सामान्य प्रवृत्ति दर्शाता है (Represents the Most Frequent Value): यह दर्शाता है कि कौन-सा मान सबसे अधिक बार आता है।
-  गणना सरल (Easy to Compute): इसे बिना गणना के भी देखा जा सकता है।
-
- (C) दोष (Disadvantages):
-  सभी डेटा को ध्यान में नहीं रखता (Does Not Consider All Data Points): Mode सिर्फ बार-बार आने वाले मान को दिखाता है, बाकी डेटा इग्नोर हो सकता है।
-  अगर डेटा में कोई बार-बार न आने वाला मान हो, तो Mode निकालना मुश्किल हो सकता है।
-
- (D) उपयोग (Uses in Psychology):
-  सर्वेक्षणों में (Surveys में सबसे अधिक पसंद किए गए विकल्प को समझने के लिए)
-  Disorders के सबसे आम Symptoms पहचानने में
-  पसंदीदा Therapy Method जानने में

Example (Mean, Median, Mode)

- डेटा सेट: 2, 3, 3, 5, 7, 10, 10, 10, 12
- Mean = $(2+3+3+5+7+10+10+10+12) / 9 = 6.89$
- Median = 7 (मध्य मान)
- Mode = 10 (सबसे बार आने वाला मान)

- संक्षेप में:
-
- 1. Mean (औसत) – सबका जोड़, फिर बराबर बाँटो।
-
-
- 2. Median (माध्यिका) – बीच वाला पकड़ो।
-
-
- 3. Mode (बहुलक) – जो सबसे ज़्यादा बार आया, वही सही!
-
-
-  Mode तभी निकलता है जब कोई संख्या बार-बार आए।
-  अगर कोई संख्या रिपीट नहीं हुई, तो Mode नहीं होता।
-  अगर दो संख्या बराबर बार आईं, तो दो Mode हो सकते हैं।

निष्कर्ष

- ✓ Mean सभी डेटा को ध्यान में रखता है, लेकिन Outliers से प्रभावित होता है।
- ✓ Median Outliers से सुरक्षित है, असंतुलित डेटा के लिए बेहतर है।
- ✓ Mode सबसे आम मान दर्शाता है और Categorical Data में उपयोगी है।
- Psychology में तीनों का उपयोग अलग-अलग प्रकार के डेटा के लिए किया जाता है।

Basic Level (मूलभूत स्तर)

सूत्र आधारित प्रश्न (Formula-Based Questions)

1. Mean का सूत्र क्या है?

- A) $\Sigma X/N$
- b) $N/\Sigma X$
- c) $(\Sigma X \times N)$
- d) $\Sigma X^2/N$

2. Median निकालने का सही तरीका क्या है?

- A) डेटा को Ascending या Descending क्रम में रखना और मध्य मान चुनना
- b) Mean की गणना करके उसे Median मान लेना
- c) Mode और Mean के औसत से Median निकालना
- d) Frequency Table का उपयोग करना

3. Mode को कैसे पहचाना जाता है?

- A) Mean और Median के औसत से
- b) सबसे अधिक बार आने वाले मान से
- c) सबसे छोटे मान से
- d) सबसे बड़े मान से

- . Moderate Level
-
- 4. Mean का सबसे बड़ा दोष क्या है?
- A) यह सभी डेटा पॉइंट्स को ध्यान में रखता है
- b) यह Outliers से बहुत प्रभावित होता है
- c) इसकी गणना कठिन होती है
- d) इसका उपयोग केवल Psychology में किया जाता है
-
- 5. Mode का प्रमुख उपयोग कहाँ होता है?
- A) IQ स्कोर में
- b) Consumer Behavior Analysis में
- c) केवल Medical Research में
- d) केवल Case Studies में
-
- 6. Median क्यों उपयोगी होता है?
- A) जब डेटा Symmetric हो
- b) जब डेटा में Extreme Values (Outliers) हों
- c) जब डेटा Normal Distribution में हो
- d) जब डेटा में केवल एक ही मान हो

उत्तर (Answers)

1. (a) $\Sigma X/N$
2. (a) डेटा को क्रम में रखकर मध्य मान निकालना
3. (b) सबसे अधिक बार आने वाला मान
4. (b) यह Outliers से प्रभावित होता है
5. (b) Consumer Behavior Analysis में
6. (b) जब डेटा में Extreme Values (Outliers) हों

- प्रश्न
- यदि एक डेटा सेट में निम्नलिखित मान हैं: 10, 20, 30, 40, 50, तो माध्यिका क्या है?
- (a) 20
- (b) 30
- (c) 40
- (d) 50
- प्रश्न
- एक कक्षा में छात्रों की ऊँचाई का औसत 160 सेमी है। निम्नलिखित में से कौन सा कथन सबसे अधिक संभावना है?
- (a) कक्षा में सभी छात्रों की ऊँचाई 160 सेमी है।
- (b) कक्षा में अधिकांश छात्रों की ऊँचाई 160 सेमी के आसपास है।
- (c) कक्षा में कोई भी छात्र 160 सेमी से लंबा नहीं है।
- (d) कक्षा में कोई भी छात्र 160 सेमी से छोटा नहीं है।

Thanks

सांख्यिकीय माप (Mean, Median, Mode) से संबंधित प्रश्न

1. Mean (औसत) से संबंधित प्रश्न:

(Mean का फार्मूला: $\text{Mean} = (\Sigma X) / N$)

Q1. एक कक्षा में 10 विद्यार्थियों के अंकों का औसत ज्ञात कीजिए:

40, 55, 60, 35, 50, 70, 80, 65, 45, 75

Q2. किसी दुकान में 5 दिन की बिक्री (रुपयों में) इस प्रकार है:

₹500, ₹750, ₹900, ₹600, ₹850

इनका औसत निकालिए।

Q3. यदि 5 संख्याओं का औसत 40 है और उनमें से चार संख्याएँ 30, 35, 45, और 50 हैं, तो पाँचवीं संख्या ज्ञात कीजिए।

2. Median (माध्यिका) से संबंधित प्रश्न:

(Ordered Data में Median का फार्मूला:

- जब कुल संख्याएँ विषम होती हैं: $\text{Median} = (n+1)/2$ वीं संख्या
- जब कुल संख्याएँ सम होती हैं: $\text{Median} = (n/2 \text{ वीं संख्या} + (n/2 + 1) \text{ वीं संख्या})/2$

Q4. निम्न संख्याओं के लिए माध्यिका ज्ञात करें:

35, 42, 50, 60, 70, 75, 80

Q5. एक परीक्षा में 8 छात्रों को मिले अंक निम्नलिखित हैं:

20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55

इनका माध्यिका ज्ञात करें।

3. Mode (बहुलक) से संबंधित प्रश्न:

(Mode वह संख्या होती है जो सबसे अधिक बार आती है।)

Q6. निम्न डेटा का मोड ज्ञात करें:

3, 5, 7, 8, 5, 10, 5, 12, 7, 5

Q7. दिए गए आंकड़ों के लिए मोड निकालें:

22, 30, 25, 28, 30, 35, 30, 40, 50, 30, 60

उत्तर:

1. Mean (औसत)

- **Q1:** 57.5
- **Q2:** ₹720
- **Q3:** 40

2. Median (माध्यिका)

- **Q4:** 60
- **Q5:** 37.5

3. Mode (बहुलक)

- **Q6:** 5
- **Q7:** 30

Mean, Median, Mode से संबंधित प्रश्न (Ungrouped + Grouped Data)

1. Mean (औसत) से संबंधित प्रश्न:

(Mean का फार्मूला: $\text{Mean} = (\Sigma fX) / \Sigma f$)

Q1. एक कक्षा में 6 छात्रों के अंकों का औसत ज्ञात कीजिए:
45, 50, 55, 60, 65, 70

Q2. एक दुकान में 5 दिन की बिक्री (रुपयों में) इस प्रकार है:
₹600, ₹750, ₹900, ₹500, ₹850
इनका औसत निकालिए।

Q3. (Grouped Data) एक कंपनी में कर्मचारियों के मासिक वेतन का वर्गीकरण इस प्रकार है:

वेतन (₹)	कर्मचारियों की संख्या
5000-10000	5
10000-15000	8
15000-20000	12
20000-25000	10
25000-30000	5

Mean वेतन ज्ञात करें।

2. Median (माध्यिका) से संबंधित प्रश्न:

(Ordered Data में Median का फार्मूला:

- जब कुल संख्याएँ विषम होती हैं: $\text{Median} = (n+1)/2$ वीं संख्या
- जब कुल संख्याएँ सम होती हैं: $\text{Median} = (n/2 \text{ वीं संख्या} + (n/2 + 1) \text{ वीं संख्या})/2$
- **Grouped Data के लिए Median का फार्मूला:**

$$\text{Median} = L + \left(\frac{\frac{N}{2} - CF}{f} \right) \times h$$

- L = Median वर्ग की lower boundary
- N = कुल आवृत्ति
- CF = Median वर्ग के पहले की cumulative frequency
- f = Median वर्ग की frequency
- h = वर्ग का अंतराल



Q4. निम्न संख्याओं के लिए माधिका ज्ञात करें:
25, 30, 35, 40, 45, 50, 55

Q5. (Grouped Data) एक स्कूल में छात्रों की ऊँचाई के डेटा से माधिका निकालें:

ऊँचाई (से.मी.)	छात्रों की संख्या
140-150	4
150-160	6
160-170	8
170-180	10
180-190	5

3. Mode (बहुलक) से संबंधित प्रश्न:

(Mode वह संख्या होती है जो सबसे अधिक बार आती है।)

Grouped Data के लिए Mode का फार्मूला:

$$Mode = L + \left(\frac{(f_1 - f_0)}{(2f_1 - f_0 - f_2)} \right) \times h$$

- L = Modal वर्ग की lower boundary
- f_1 = Modal वर्ग की frequency
- f_0 = Modal वर्ग से पहले की frequency
- f_2 = Modal वर्ग के बाद की frequency
- h = वर्ग का अंतराल

Q6. निम्न डेटा का मोड ज्ञात करें:

3, 5, 7, 8, 5, 10, 5, 12, 7, 5

Q7. (Grouped Data) किसी गाँव में परिवारों की मासिक आय का वर्गीकरण इस प्रकार है:

आय (₹)	परिवारों की संख्या
10000-20000	3
20000-30000	6
30000-40000	9
40000-50000	15
50000-60000	7

Mode ज्ञात करें।

उत्तर:

1. Mean (औसत)

- Q1: 57.5
- Q2: ₹720
- Q3: ₹17,000

2. Median (माधिका)

- Q4: 40
- Q5: 165 से.मी.

3. Mode (बहुलक)

- Q6: 5
- Q7: ₹42,500

Median वर्ग की पहचान कैसे करें?

Median वर्ग को पहचानने के लिए हमें निम्नलिखित चरणों का पालन करना होता है:

चरण 1: कुल आवृत्ति (N) निकालें

सभी वर्गों की आवृत्तियों (frequency, f) को जोड़कर N (कुल आवृत्ति) निकालें।

चरण 2: Cumulative Frequency (CF) निकालें

Cumulative Frequency (संचयी आवृत्ति) का मतलब होता है कि प्रत्येक वर्ग तक की कुल आवृत्तियों का जोड़। इसे step-by-step जोड़ते जाते हैं।

चरण 3: $N/2$ निकालें

कुल आवृत्ति N का आधा निकालें ($N/2$)।

चरण 4: Median वर्ग पहचान करें

उदाहरण

एक स्कूल में छात्रों की ऊँचाई के डेटा से माध्यिका निकालने के लिए निम्न तालिका दी गई है:

ऊँचाई (से.मी.)	छात्रों की संख्या (f)	Cumulative Frequency (CF)
140 - 150	4	4
150 - 160	6	4 + 6 = 10
160 - 170	8	10 + 8 = 18
170 - 180	10	18 + 10 = 28
180 - 190	5	28 + 5 = 33

चरण 1: कुल आवृत्ति (N) निकालें

$$N = 4 + 6 + 8 + 10 + 5 = 33$$

चरण 2: $N/2$ निकालें

$$N/2 = 33/2 = 16.5$$

चरण 2: $N/2$ निकालें

$$N/2 = 33/2 = 16.5$$

चरण 3: Median वर्ग की पहचान करें

अब हम cumulative frequency (CF) देखते हैं:

- CF = 10 (यह 16.5 से छोटा है)
- CF = 18 (यह पहली बार 16.5 से बड़ा है)

इसलिए, "160 - 170" वर्ग Median वर्ग होगा।

Median वर्ग पहचानने के लिए एक सामान्य नियम:

"Cumulative Frequency में वह पहली बार $N/2$ से बड़ा या बराबर हो, वही Median वर्ग होता है।"

